

Prata 71a: Control 3.

Probanemos que $\int_{-a}^0 f = \int_0^a f$, ya que si:
 pasa lo anterior, por propiedades de la integral de
 Riemann,

$$\int_{-a}^a f = \int_{-a}^0 f + \int_0^a f = 2 \int_0^a f.$$

Entonces, sea P una partición cualquiera del
 intervalo $[0, a]$. Y denotemos por $m_i^1(f)$, $M_i^1(f)$ a

$$m_i^1(f) = \inf \{ f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i] \}, \quad i=1, \dots, n.$$

$$M_i^1(f) = \sup \{ f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i] \},$$

donde $x_i \in P$, $i=1, \dots, n$.

Ahora, denotemos por $m_i^2(f)$, $M_i^2(f)$ a

$$m_i^2(f) = \inf \{ f(x) : x \in [z_{i-1}, z_i] \}$$

$$M_i^2(f) = \sup \{ f(x) : x \in [z_{i-1}, z_i] \}$$

donde $z_i \in Q$, con Q partición de $[-a, 0]$.

Notemos que para $P \in \mathcal{P}_{[0,a]}$ de tiene que

$$\begin{aligned} m_i^1(f) &= \inf \{ f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i] \} \\ &= \inf \{ f(x) : -x \in [-x_i, -x_{i-1}] \} \\ &= \inf \{ f(-x) : x \in [-x_i, -x_{i-1}] \} \\ &= \inf \{ f(x) : x \in [-x_i, -x_{i-1}] \} \\ &= m_i^2(f), \end{aligned}$$

ya que la partición $Q = \{-x_i : i=0, 1, \dots, n\}$ es una partición del intervalo $[-a, 0]$.
Luego, obtenemos que la suma inferior

$$I(f, P) = \sum m_i^1(f) \Delta x_i = \sum m_i^2(f) \Delta x_i.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \int_0^a f &= \sup \{ I(f, P) : P \in \mathcal{P}_{[0,a]} \} \\ &= \sup \{ I(f, P) : P \in \mathcal{P}_{[-a,0]} \} = \int_{-a}^0 f \end{aligned}$$

Como f es integrable, obtenemos ~~de~~
 MANERA ANÁLOGA por

$$\int_0^a f = \int_{-a}^0 f \quad \text{Y}$$

$$\int_0^a f = \int_{-a}^0 f.$$